Fonctions

▶ Exercice n°1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les images par f de 3 et -1 .
3. Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) par f de 0.
4. Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) par f de 4.
5. Déterminer les réels m qui n'admettent qu'un unique antécédent par f.

▶ Exercice n°2

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[0\,;\,7]$.

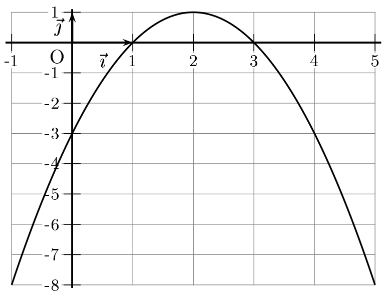
x	0		4		7
$f(x)$	2	↘	-3	↗	-1

Déterminer, en justifiant votre réponse, si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

- *Proposition 1 :* $f(2) \geqslant f(3)$
- *Proposition 2 :* $f(-3) = 4$
- *Proposition 3 :* l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0\,;\,7]$
- *Proposition 4 :* -3 est le minimum de f sur $[0\,;\,7]$

▶ Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $[-1;5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
2. Déterminer graphiquement les antécédents de -3 par f.
3. Dans quel intervalle varie $f(x)$ quand x varie dans $[-1;5]$?
4. Résoudre graphiquement dans $[-1;5]$ les équations suivantes :
   a) $f(x) = 0$
   b) $f(x) = 2$
   c) $f(x) = 1$
   d) $f(x) = x - 3$
5. Résoudre graphiquement dans $[-1;5]$ les inéquations suivantes :
   a) $f(x) \geqslant 0$
   b) $f(x) \geqslant x - 3$

▶ Exercice n°4

Compléter les inégalités suivantes :

1. Si $2 < x < 5$ alors $\ldots < x^2 < \ldots$ et $\ldots < \dfrac{1}{x^2} < \ldots$
2. Si $1 \leqslant x \leqslant 3$ alors $\ldots \leqslant \sqrt{x} \leqslant \ldots$ et $\ldots \leqslant -4\sqrt{x} \leqslant \ldots$
3. Si $-4 \leqslant x \leqslant -1$ alors $\ldots \leqslant x^2 \leqslant \ldots$.

   Donc, $\ldots \leqslant x^2 + 4 \leqslant \ldots$ et $\ldots \leqslant \sqrt{x^2+4} \leqslant \ldots$
4. Si $-12 \leqslant -\dfrac{3}{x} \leqslant -3$ alors $\ldots \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \ldots$ donc $\ldots \leqslant x \leqslant \ldots$
5. Si $-1 \leqslant 4 - \sqrt{x} \leqslant 2$ alors $\ldots \leqslant -\sqrt{x} \leqslant \ldots$.

   Donc, $\ldots \leqslant \sqrt{x} \leqslant \ldots$ et $\ldots \leqslant x \leqslant \ldots$

▶ Exercice n°5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 1}{x-2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.
Étudier la position relative des les courbes représentatives de f et g sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

▶ Exercice n°6

Soit f la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x}{4x+8}$.

Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = \dfrac{5}{4}$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

▶ Exercice n°7

Déterminer la valeur absolue des réels suivants :

$-\sqrt{2}$; $-\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{3}{4}$; $4-\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$; $2-\dfrac{\pi}{4}$; $-\dfrac{2\pi}{3}$; $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

▶ Exercice n°8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|2x-4|-|3x+1|$.
Calculer $f(0)$, $f(-2)$ et $f(8)$.

▶ Exercice n°9

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

1. On cherche à établir les variations de f grâce aux propriétés du cours.
   Compléter les phrases suivantes avec les expressions « croissante » ou « décroissante » :
   - La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est .... sur $[0\,;+\infty[$;
   - Donc, la fonction $x \mapsto 1+\sqrt{x}$ est .... sur $[0\,;+\infty[$;
   - Comme, pour tout $x \geqslant 0$, on a $1+\sqrt{x}>0$, on peut en conclure que f est .... sur $[0\,;+\infty[$.
2. On cherche à créer un algorithme qui permette de compléter automatiquement le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$y=f(x)$											

   Pour cela, on utilise le principe suivant : pour chaque valeur de x, on calcule la valeur correspondante de y et on augmente la valeur de x de 0,5 **tant que** la fin du tableau n'est pas atteinte.
   Compléter les lignes 6, 8 et 13 pour que l'algorithme AlgoBox ci-dessous réponde au problème :

```
1: VARIABLES
2: x EST_DU_TYPE NOMBRE
3: y EST_DU_TYPE NOMBRE
4: DEBUT_ALGORITHME
5:    x PREND_LA_VALEUR 0
6:    TANT_QUE (x.....) FAIRE
7:       DEBUT_TANT_QUE
8:       y PREND_LA_VALEUR ...........
9:       AFFICHER "Si x vaut "
10:      AFFICHER x
11:      AFFICHER " alors y vaut "
12:      AFFICHER y
13:      x PREND_LA_VALEUR ...........
14:      FIN_TANT_QUE
15: FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°10

On considère la proposition suivante : « Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout x, $f(x)$ est positif ».

1. Exprimer la **négation** de cette proposition.
2. Exprimer la **réciproque** de cette proposition.
3. La proposition est-elle vraie ?
4. La réciproque de la proposition est-elle vraie ?

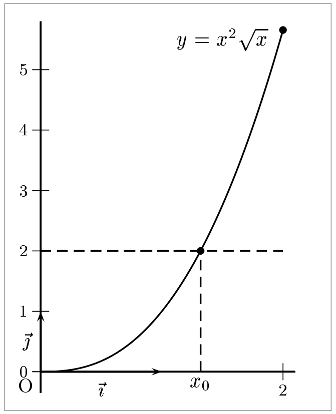
▶ Exercice n°11

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier est appelé partie entière de x et il est noté $E(x)$.

1. Calculer $E(2{,}4)$, $E(4)$, $E(-1{,}5)$ et $E(-4{,}7)$.
2. Représenter la courbe de la fonction partie entière dans un repère orthonormé d'unité 1cm.
3. Montrer que pour tout réel x, $E(x+1)=E(x)+1$.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-E(x)$. Montrer que , pour tout x, on a $f(x+1)=f(x)$.

▶ Exercice n°12

On considère la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par $f(x)=x^2\sqrt{x}$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



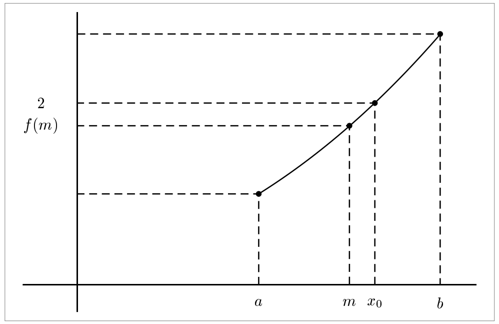
On s'intéresse au réel x_0 tel que $f(x_0)=2$.

On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;2]$ et que sa courbe ne contient pas de « trous » .
Comme $f(0)=0$ et $f(2)=4\sqrt{2}>2$, on sait que $x_0 \in [0\,;2]$.

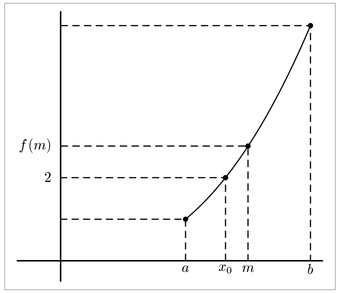
1. On cherche à déterminer une valeur approchée de x_0 par la méthode dite de la « dichotomie » dont le principe est le suivant : on coupe l'intervalle en deux et on regarde de quel côté se situe la solution par rapport au milieu de l'intervalle et on réitère le processus.

a) Étant donné un intervalle $[a;b]$ de milieu m et contenant x_0 (avec $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 2$).

• Si $f(m) < 2$, dans quel intervalle se situe x_0 ? ....



• Si $f(m) > 2$, dans quel intervalle se situe x_0 ? ....



b) Compléter le tableau suivant :

Étape	Intervalle de départ $[a;b]$	milieu m	$f(m) < 2$?	Nouvel intervalle $[a;b]$
1	$a = 0$; $b = 2$	$m = 1$	OUI	$a =$........ ; $b =$........
2	$a =$........ ; $b =$........	$m =$........	...	$a =$........ ; $b =$........
3	$a =$........ ; $b =$........	$m =$........	...	$a =$........ ; $b =$........
4	$a =$........ ; $b =$........	$m =$........	...	$a =$........ ; $b =$........

c) On cherche à automatiser les calculs grâce à un algorithme. Compléter les lignes 14 et 18 pour que l'algorithme AlgoBox ci-dessous réponde au problème.

```
 1: VARIABLES
 2: a EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: b EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: m EST_DU_TYPE NOMBRE
 5: numero_etape EST_DU_TYPE NOMBRE
 6: DEBUT_ALGORITHME
 7:   a PREND_LA_VALEUR 0
 8:   b PREND_LA_VALEUR 2
 9:   POUR numero_etape ALLANT_DE 1 A 4
10:     DEBUT_POUR
11:     m PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
12:     SI (m*m*sqrt(m)<2) ALORS
13:       DEBUT_SI
14:       ...... PREND_LA_VALEUR m
15:       FIN_SI
16:     SINON
17:       DEBUT_SINON
18:       ...... PREND_LA_VALEUR m
19:       FIN_SINON
20:     AFFICHER a
21:     AFFICHER " <x0< "
22:     AFFICHER b
23:     FIN_POUR
24: FIN_ALGORITHME
```