Dérivation

▶ Exercice n°1
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = 3x^2 - x + 7$
3. $f(x) = -5x^2 + \dfrac{x}{2} - 7$
4. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x$
5. $f(x) = -2x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + 7x - 1$
6. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{5}{6}x^3 + 2x^2 - 4$
7. $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 8$

▶ Exercice n°2
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = -\dfrac{4}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x} - x^2 + 7$
3. $f(x) = 4\sqrt{x} - \dfrac{6}{x}$

▶ Exercice n°3
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = x\sqrt{x}$
2. $f(x) = (x^2 + 1)(\sqrt{x} + 2)$
3. $f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x - \sqrt{x})$
4. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(x^2 - 2\right)$
5. $f(x) = (x + 3)(x^2 + 1)$ (sans développer $f(x)$)

▶ Exercice n°4
Dériver la fonction f dans les cas suivants (sans développer $f(x)$) :

1. $f(x) = (2x - 5)^2$
2. $f(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x + 3\right)^2$
3. $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)^2$
4. $f(x) = \left(3x^2 - \dfrac{1}{x} + 7\right)^2$

▶ Exercice n°5
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{3x - 7}$
3. $f(x) = \dfrac{3}{5x + 10}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - x - 3}$
6. $f(x) = \dfrac{-4}{x^2 + x + 1}$
7. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x}$

▶ Exercice n°6
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$
2. $f(x) = \dfrac{-2x + 5}{4x + 3}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 7}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{3x^2 + 4x + 7}$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x + 1}$

▸ Exercice n°7

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ $\qquad a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - x$ $\qquad a = -2$

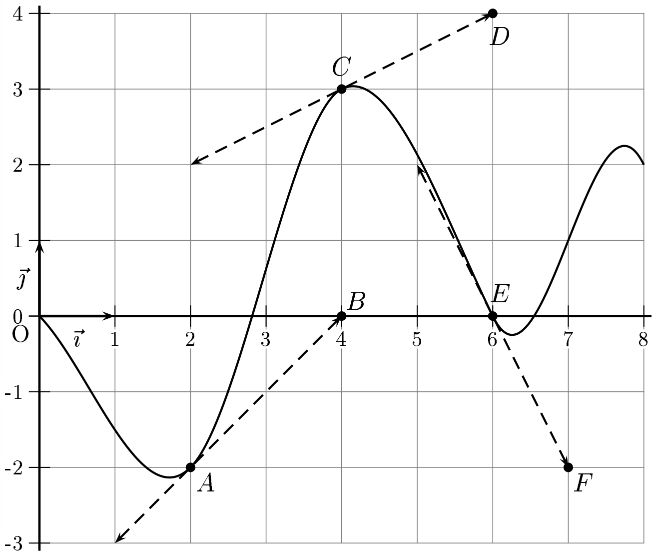
▸ Exercice n°8

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1. $f(x) = 3x^2 - x + 1$ $\qquad a = 1$
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ $\qquad a = 3$
3. $f(x) = \dfrac{1}{5x+1}$ $\qquad a = -2$

▸ Exercice n°9

Dans la figure ci-dessous est représentée la courbe d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,8]$.



1. La tangente au point A d'abscisse 2 passe par le point B. En déduire $f'(2)$.
2. La tangente au point C d'abscisse 4 passe par le point D. En déduire $f'(4)$.
3. La tangente au point E d'abscisse 6 passe par le point F. En déduire $f'(6)$.

▸ Exercice n°10

Déterminer si la courbe C_f admet des tangentes de coefficient directeur égal à m dans les cas suivants : (on donnera une équation de ces tangentes lorsqu'elles existent)

1. f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ $\qquad m = -5$
2. f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ $\qquad m = \frac{1}{2}$

▸ Exercice n°11

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{x}$.

Déterminer les points de la courbe représentative de f (dans un repère orthonormal) où la tangente :

1. est horizontale.
2. admet -2 pour coefficient directeur.
3. est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

▸ Exercice n°12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Déterminer si la courbe C_f admet des tangentes passant par le point $A\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

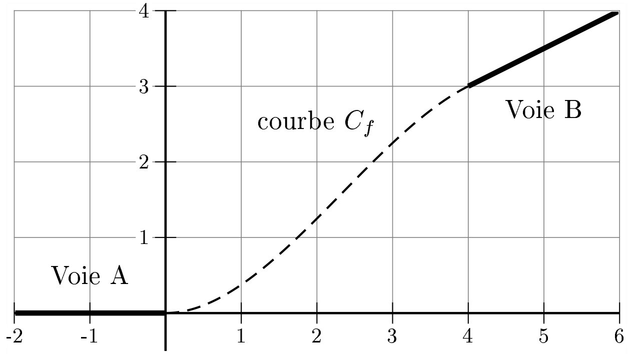
▸ Exercice n°13

La concentration (en mg) d'un médicament dans le sang en fonction du temps t (en heures) est donnée par $f(t) = \dfrac{50t}{t^2+4}$.

1. Le médicament est considéré comme efficace si la concentration dépasse 4 mg. Quelle est la durée nécessaire pour atteindre ce seuil ?
2. On appelle vitesse de concentration du médicament (en $\text{mg}\cdot\text{h}^{-1}$) à l'instant t (en heures) la valeur de $f'(t)$.
   a) Quelle est la vitesse de concentration au bout de 2 heures ?
   b) Déterminer l'instant t pour lequel la vitesse de concentration est égale à $6\text{mg}\cdot\text{h}^{-1}$.

▶ Exercice n°14

La figure ci-dessous schématise deux voies ferrées que l'on doit joindre par la courbe représentative d'une fonction f de telle façon que les raccordements soient tangents.



Autrement dit, f doit respecter les quatre conditions suivantes :
$f(0) = 0$; $f'(0) = 0$, $f(4) = 3$; $f'(4) = \frac{1}{2}$ (coefficient directeur de la voie B)
On cherche $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. En exprimant que $f(0) = 0$, déterminer la valeur de d.
2. Exprimer $f'(x)$.
3. En exprimant que $f'(0) = 0$, déterminer la valeur de c.
4. En exprimant que $f(4) = 3$ et $f'(4) = \frac{1}{2}$, déterminer le système que doivent vérifier a et b. En déduire l'expression finale de $f(x)$ qui réponde au problème.

▶ Exercice n°15

Quand un objet est lâché sans vitesse initiale, il parcourt une distance (en mètres) égale à $d(t) \approx 5t^2$ où t représente la durée de la chute (en secondes).

1. Calculer $d'(3)$, le nombre dérivé de la fonction d pour $t = 3$ secondes.
2. a) Calculer $d(3)$, la distance parcourue par l'objet en 3 secondes.
   b) Calculer $d(3{,}1)$, la distance parcourue par l'objet en 3,1 secondes. En déduire la vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t = 3$ et $t = 3{,}1$.
   c) Calculer $d(3{,}01)$, la distance parcourue par l'objet en 3,01 secondes. En déduire la vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t = 3$ et $t = 3{,}01$. Que constate-t-on ?
3. On appelle vitesse instantanée de l'objet à l'instant t, la valeur de $d'(t)$.
   a) À quel instant la vitesse instantanée est-elle égale à 100 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$? Quelle est alors la distance parcourue ?
   b) Quelle est la vitesse instantanée à l'instant de l'impact au sol, lorsque le point matériel est lâché d'une hauteur de 30 m ?

▶ Exercice n°16

Soit f la fonction définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = 10x^2\sqrt{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Dériver f et montrer que pour $x \in]0\,;3]$, on a $f'(x) = 25x\sqrt{x}$.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
4. On cherche à déterminer à l'aide d'un algorithme une valeur approchée à 0,01 près du premier nombre a tel que le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a soit supérieur ou égal à 50.
   On sait d'après les premières questions que a est compris entre 1 et 2. On part donc de $a = 1$ et on augmente a de 0,01 tant que le coefficient directeur ne dépasse pas 50.
   Compléter les lignes et pour que l'algorithme AlgoBox ci-dessous réponde au problème.

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (.....................) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    a PREND_LA_VALEUR ..............
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER a
FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°17

On considère la proposition suivante : « Si $f(x) = x^2 + 1$ alors $f'(x) = 2x$ ».

1. Exprimer la **réciproque** de cette proposition.
2. La proposition est-elle vraie ?
3. La réciproque de la proposition est-elle vraie ?