Indications de correction Métropole STI2D - STL SPCL 2013

Exercice n°1

1. (a) La calculatrice ou l'utilisation de $p(X > 99) = 1 - p(X \leqslant 99)$ donne $p(X > 99) \approx 0{,}99$.

   (b) La calculatrice ou l'utilisation de $p(99 \leqslant X \leqslant 101) = p(X \leqslant 101) - p(X \leqslant 99)$ donne $p(99 \leqslant X \leqslant 101) \approx 0{,}98$.

   (c) $p(\text{pot non conforme}) = 1 - p(\text{pot conforme}) = 1 - p(99 \leqslant X \leqslant 101) \approx 0{,}02$.

2. (a) $p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = 0{,}98 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}98 \times 0{,}02}{120}} \approx 0{,}955$

   $p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = 0{,}98 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}98 \times 0{,}02}{120}} \approx 1{,}005$

   (b) La fréquence observée est $f = \dfrac{113}{120} \approx 0{,}942$ qui ne fait pas partie de l'intervalle de fluctuation à 95%. On peut donc rejeter au seuil de 95% l'hypothèse selon laquelle la chaine de production fonctionne correctement. On peut donc supposer qu'une décision d'effectuer des réglages sur la chaine de production sera prise.

Exercice n°2

Partie A :

1. On prévoit que le température dans la pièce va décroitre et que la fonction f est donc décroissante sur $[0\,;\,9]$.

2. Pour tout t dans $[0\,;\,9]$, $f'(t) = 9 \times (-0{,}12) \times \mathrm{e}^{-0{,}12t} = -1{,}08 \times \mathrm{e}^{-0{,}12t}$.
   Comme un exponentiel est toujours strictement positif, on a $f'(t) < 0$ pour tout t dans $[0\,;\,9]$. Ce qui justifie le fait d'affirmer que f est décroissante sur $[0\,;\,9]$.

3. $f(9) = 9 \times \mathrm{e}^{-0{,}12\times 9} + 11 \approx 14{,}1$.
   La température de la pièce à 7 h sera d'environ 14,1 °C.

4. La calculatrice donne $f(6) \approx 15{,}4$ et $f(7) \approx 14{,}9$.
   En heures entières, la température deviendra inférieure à 15 °C au bout de 7 heures, c'est à dire à partir de 5 heures du matin.

5.
$$\begin{aligned} f(t) < 15 &\Leftrightarrow 9 \times \mathrm{e}^{-0{,}12t} < 4 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}12t} < \frac{4}{9} \\ &\Leftrightarrow -0{,}12t < \ln\left(\frac{4}{9}\right) \\ &\Leftrightarrow t > \frac{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}{(-0{,}12)} \end{aligned}$$

   Or, $\dfrac{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}{(-0{,}12)} \approx 6{,}7$. En heures entières, on retrouve que la température deviendra inférieure à 15 °C au bout de 7 heures.

Partie B :

1. $\displaystyle\int_0^9 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^9 \frac{0{,}7}{(-0{,}12)} \times \underbrace{(-0{,}12)\times \mathrm{e}^{-0{,}12t}}_{\text{forme exacte u}'\text{e}^{\text{u}}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{0{,}7}{(-0{,}12)} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-0{,}12t}}_{\mathrm{e}^{u}}\right]_0^9.$
   On a donc, $\mathcal{E} = \dfrac{0{,}7}{(-0{,}12)} \times \mathrm{e}^{-0{,}12\times 9} - \dfrac{0{,}7}{(-0{,}12)} \times \mathrm{e}^{0} = -\dfrac{0{,}7}{0{,}12} \times \mathrm{e}^{-1{,}08} + \dfrac{0{,}7}{0{,}12}$.
2. La calculatrice donne $\mathcal{E} \approx 3{,}9$ kWh.

Exercice n°3

1. Réponse **(b)** car ,
   $2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}.$

2. Réponse **(d)** car ,
   $\dfrac{3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

3. Réponse **(d)** car ,
   Si $f(x) = 0{,}7\sin(3x)$ alors $f'(x) = 3 \times 0{,}7\cos(3x)$, $f''(x) = -9 \times 0{,}7\sin(3x)$ et donc, $f''(x) + 9f(x) = 0$ pour tout x.

4. Réponse **(b)** car ,
   L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 7$.
   Les solutions sont donc de la forme $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{-7x}$.
   De plus, $f(0) = 9 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^{0} = 9 \Leftrightarrow k = 9$.

Exercice n°4

Partie A :

1. $p_1 = p_0 - \dfrac{0,3}{100} p_0 = p_0 - 0,003\, p_0 = 0,997\, p_0$.
2. De la même façon, on a $p_2 = 0,997\, p_1$ et donc $p_2 = 0,997^2\, p_0 \approx 6361$ (à l'unité près par défaut).
   La puissance au bout de 200 km sera donc de 6362 MW.
3. On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par 0,997. La suite (p_n) est donc géométrique de raison $q = 0,997$.
   Dès lors, on a pour tout entier n, $p_n = q^n \times p_0 = 0,997^n \times 6400$.

Partie B :

1.

	n	q	p
Entrées et initialisation	3	0,997	6400
1^er^passage dans la boucle de l'algorithme			6380
2^e^passage dans la boucle de l'algorithme			6361
3^e^passage dans la boucle de l'algorithme			6342

2. La valeur de p obtenue au troisième passage correspond à p_3.
3. $\dfrac{p_3 - p_0}{p_0} \times 100 = \dfrac{6342 - 6400}{6400} \times 100 \approx -0,9$.
   La perte de puissance au bout de 300 km est d'environ 0,9%.

Partie C :

1. $p_{19} = 0,997^{19} \times 6400 \approx 6044$ (à l'unité près par défaut).
   La puissance électrique à l'arrivée est donc d'environ 6044 MW.
2. (a) $\dfrac{p_{19} - p_0}{p_0} \times 100 = \dfrac{6044 - 6400}{6400} \times 100 \approx -5,6$.
   La perte de puissance pour les 1900 km de la ligne est d'environ 5,6%.

   (b) Cela revient à chercher le plus grand entier n tel que $0,997^n > 1 - \dfrac{7}{100}$.

$$\begin{aligned} 0,997^n > 1 - \frac{7}{100} &\Leftrightarrow 0,997^n > 0,93 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,997^n\right) > \ln(0,93) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,997) > \ln(0,93) \\ &\Leftrightarrow n < \frac{\ln(0,93)}{\ln(0,997)} \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0,93)}{\ln(0,997)} \approx 24,1$. Le plus grand entier n qui convient est donc 24.
La longueur maximale limitant la perte à moins de 7% est donc de 2400 km (à 100 km près).