Points et vecteurs dans un repère : Résumé de cours et méthodes

1 L'essentiel du cours

Si dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on a $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors :

• le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est tel que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

• le **milieu** I de $[AB]$ est tel que : $I\begin{pmatrix} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$.

• la **distance** AB est telle que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. *(si le repère est orthonormé)*

Si dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors :

• pour tout réel k, $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ et $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

• Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque : Si aucune des coordonnées n'est nulle, on doit avoir $\dfrac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} = \dfrac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}} = k$ *(cela permet de trouver k dans les cas non évidents).*

• la **norme** du vecteur $\vec{u}$ (c'est à dire sa longueur) est le réel noté $\|\vec{u}\|$ tel que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
(si la base est orthonormée)

2 Comment déterminer les coordonnées d'un point M défini par une relation vectorielle ?

Méthode générale :

• On pose $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

• On exprime la relation vectorielle avec les coordonnées.

• En utilisant que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes abscisses et les mêmes ordonnées, on en déduit les valeurs de x et y.

Exemple 1 : On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminons les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

On pose $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et, donc, $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$

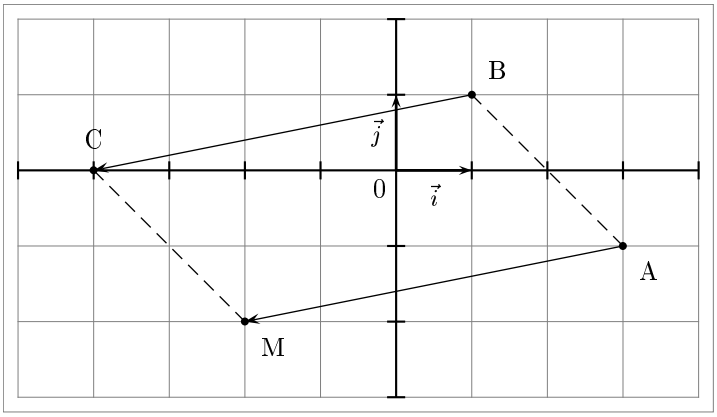
Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\begin{cases} x - 2 = 13 \\ y + 1 = 15 \end{cases}$. On a donc $x = 5$ et $y = 14$. D'où, $M\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 : On considère les points $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Déterminons les coordonnées du point M tel que $ABCM$ soit un parallélogramme.

On pose $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $ABCM$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ (faire attention à l'ordre des points).

On en déduit que $\begin{cases} x - 3 = -5 \\ y + 1 = -1 \end{cases}$. On a donc $x = -2$ et $y = -2$. D'où, $M\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.



3 Comment montrer que trois points A, B et C sont alignés connaissant leurs coordonnées ?

Méthode générale (pour 3 points distincts) :
• On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
• On vérifie qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.
(ce qui prouve leur colinéarité et l'alignement des points)

Exemple : Montrons que les points $A\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\13\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$ sont alignés.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$. $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. On en déduit que $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et que les points A, B et C sont bien alignés.