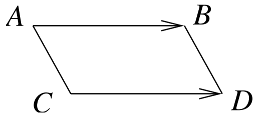
Vecteurs : Résumé de cours et méthodes

1 Egalité de deux vecteurs

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.



2 Relation de Chasles

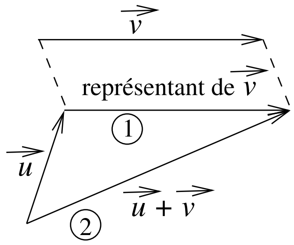
Pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Applications :

• Simplifier des expressions vectorielles :
Quand on remplace $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AC}$, on **simplifie** l'expression $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
Exemple de simplification :
$\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}+\underbrace{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\underbrace{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}=\overrightarrow{CB}$
• Décomposer un vecteur :
Quand on remplace $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, on **décompose** le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en faisant apparaître le point B.
Autre exemple de décomposition : si on veut décomposer le vecteur $\overrightarrow{CM}$ en faisant apparaître le point A, on écrit que $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$.

3 Somme de deux vecteurs

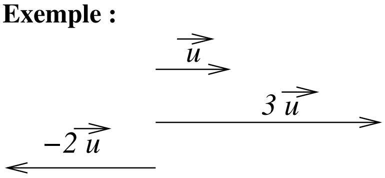
Pour construire la somme de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
1) On trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ partant de l'extrémité de $\overrightarrow{u}$.
2) On joint l'origine de $\overrightarrow{u}$ avec l'extrémité du représentant de $\overrightarrow{v}$ que l'on vient de tracer. On obtient alors un représentant de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.



4 Multiplication d'un vecteur par un réel

Pour tout réel k et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nuls, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est tel que :
- $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont de même direction.
- Si $k>0$, $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont de même sens et la longueur de $k\overrightarrow{u}$ est égale à celle de $\overrightarrow{u}$ multipliée par k.
- Si $k<0$, $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont de sens contraires et la longueur de $k\overrightarrow{u}$ est égale à celle de $\overrightarrow{u}$ multipliée par $(-k)$.

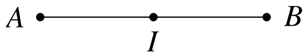
Exemple :



Remarque : Pour construire $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, on effectue la somme de $\overrightarrow{u}$ avec $-\overrightarrow{v}$.

5 Vecteurs et milieu d'un segment

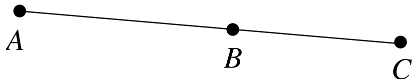
Dire que I est le mileu de $[AB]$ équivaut à dire que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.



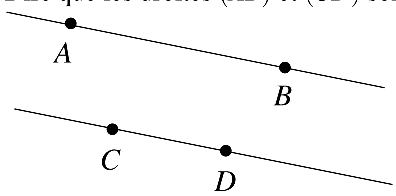
6 Vecteurs colinéaires, alignement, parallélisme

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

Dire que les points A, B et C sont alignés équivaut à dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

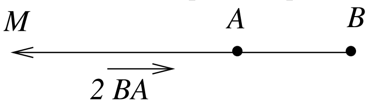


Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

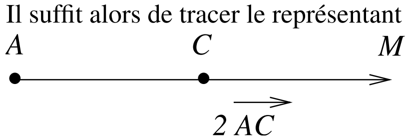


7 Constructions de points définis vectoriellement

• **1er cas :** Le point M à tracer est défini par une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.
Méthode : on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ ayant pour origine le point A. L'extrémité de ce vecteur donne le point M.
Exemple : Pour placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BA}$, on a tracé le représentant de $2\overrightarrow{BA}$ partant du point A.



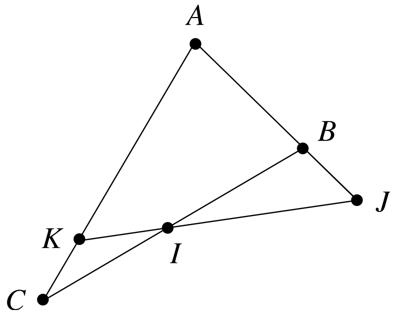
• **2ème cas :** Le point M à tracer intervient plusieurs fois dans la relation.
Méthode : On choisit un point particulier et on décompose tous les vecteurs où ce point n'intervient pas de façon à le faire apparaître (grâce à la relation de Chasles). Ainsi, le point M n'intervient plus qu'une seule fois et on est ramené au 1er cas.
Exemple : Etant donné les points A et C, on cherche à placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CM}$. On choisit A comme point particulier de façon à n'avoir plus que ce point avec M. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{CM}$ en faisant apparaître le point A.
On obtient : $\overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\right)$. D'où, $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AM}$
On fait passer tous les $\overrightarrow{AM}$ dans un membre et tous les autres vecteurs dans l'autre.
On a alors : $\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CA}$.
On en déduit que $-\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CA}$, c'est à dire que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$.
Il suffit alors de tracer le représentant de $2\overrightarrow{AC}$ partant de A pour obtenir M.



8 Utilisation du calcul vectoriel pour montrer que 3 points sont alignés

Méthode générale :
Pour montrer que trois points sont alignés, on cherche à prouver que deux vecteurs (ayant un point en commun) sont colinéaires. Pour cela, on exprime ces deux vecteurs en fonction des points de la figure de base, en utilisant les relations vectorielles de l'énoncé et la relation de Chasles.

Exemple : Soit ABC un triangle quelconque (*c'est la figure de base*). On considère les points I, J et K tels que :
$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
Il s'agit de démontrer que les points I, J et K sont alignés.



• *Choix des deux vecteurs dont on va montrer la colinéarité*
Le choix est libre, à moins qu'il ne soit imposé par l'énoncé.
Pour notre exemple, nous allons choisir les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$.

• *Expression du premier vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*
Concernant les points J et K, l'énoncé nous donne $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
On va donc décomposer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en passant par le point A. On obtient :
$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
On a bien le premier vecteur en fonction des points de base. On passe alors au deuxième vecteur.

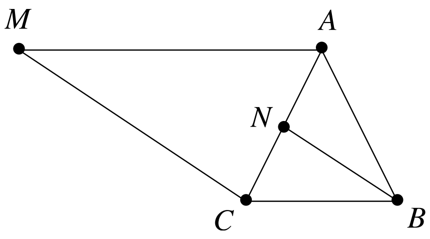
• *Expression du deuxième vecteur $\overrightarrow{JI}$ en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*
Concernant les points J et I, l'énoncé nous donne $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
On va donc décomposer le vecteur $\overrightarrow{JI}$ en passant par les points A et B. On obtient :
$\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
On a bien $\overrightarrow{JI}$ en fonction de A, B et C, mais comme $\overrightarrow{JK}$ est exprimé en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{AC}$, il faut en faire autant pour $\overrightarrow{JI}$.
Pour cela, on remplace $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.
Finalement, on a : $\overrightarrow{JI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

• *Colinéarité des deux vecteurs*
On a : $\overrightarrow{JK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On en déduit que $\overrightarrow{JK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{JI}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires, ce qui prouve que les points I, J et K sont alignés.

9 Utilisation du calcul vectoriel pour montrer que deux droites sont parallèles

Méthode générale :
Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.Pour cela, on exprime ces deux vecteurs en fonction des points de la figure de base, en utilisant les relations vectorielles de l'énoncé et la relation de Chasles.

Exemple : Soit ABC un triangle quelconque (*c'est la figure de base*). On considère les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Il s'agit de démontrer que les droites (CM) et (BN) sont parallèles. On va donc montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires.



• *Expression du premier vecteur $\overrightarrow{CM}$ en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*
Avec le point M, l'énoncé nous donne $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$. On va donc décomposer $\overrightarrow{CM}$ en faisant apparaître le point A.
On obtient : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}$.

• *Expression du deuxième vecteur $\overrightarrow{BN}$ en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*
Avec le point N, l'énoncé nous donne $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On va donc décomposer $\overrightarrow{BN}$ en faisant apparaître le point A.
On obtient : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Mais, comme le premier vecteur $\overrightarrow{CM}$ est exprimé en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$, il faut en faire autant pour $\overrightarrow{BN}$. Pour cela on remplace $\overrightarrow{BA}$ par $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
Finalement, on a : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

• *Colinéarité des deux vecteurs*
On a : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.
On en déduit que $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{BN}$ et que ces vecteurs sont colinéaires. Les droites (CM) et (BN) sont bien parallèles.