Suites : exercices

Les réponses aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - n + 1$.
a) Calculer U_0 et U_{10}.
b) Exprimer, en fonction de n, $U_n + 1$ et U_{n+1}.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.
a) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n.
b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_{10}.

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_4 = 5$ et $U_{11} = 19$.
Calculer la raison r et U_0 .

Exercice 5 :

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 7$ et de raison $q = 3$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_5.

Exercice 6 :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%.
Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.
a) On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $(2000+n)$.
Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
b) Calculer la production de l'usine en 2005.

Exercice 7 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = \dfrac{3+2U_n}{5}$ (pour tout $n \geqslant 0$).
a) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ (pour tout $n \geqslant 0$).
Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{2}{5}V_n$ (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison b et le premier terme V_0.
b) Déduire de la question précédente que $U_n = 1 + 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geqslant 0$).
c) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

Réponses exercice 1 :

a) $U_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$ et $U_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91$.
b) $U_n + 1 = (n^2 - n + 1) + 1 = n^2 - n + 2$
$U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$.

Réponses exercice 2 :

a) $U_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)+1} = \dfrac{1}{n+2}$

Donc, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$.

b) Pour tout n, $U_{n+1} - U_n < 0$. Donc la suite est décroissante.

Réponses exercice 3 :

a) $U_n = U_0 + n \times r = 4 + \dfrac{1}{2}n$.

b) $U_{10} = 4 + \dfrac{1}{2} \times 10 = 9$.

Réponses exercice 4 :

$U_{11} = U_4 + (11-4) \times r \Leftrightarrow 19 = 5 + 7r \Leftrightarrow r = 2$.

$U_4 = U_0 + 4 \times a \Leftrightarrow 5 = U_0 + 8 \Leftrightarrow U_0 = -3$.

Réponses exercice 5 :

a) $U_n = q^n \times U_0 = 7 \times 3^n$.

b) $U_5 = 7 \times 3^5 = 1701$.

Réponses exercice 6 :

a) Baisser une grandeur de 4% revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0,96$.

Pour tout n, $P_{n+1} = 0,96 \times P_n$. Cela prouve que (P_n) est une suite géométrique de raison 0,96 .

b) $P_5 = q^5 \times P_0 = (0,96)^5 \times 25000 \approx 20384$.

Réponses exercice 7 :

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \dfrac{3+2U_n}{5} - 1 = \dfrac{2U_n - 2}{5} = \dfrac{2}{5}(U_n - 1) = \dfrac{2}{5}V_n$.

La suite (V_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 1 = 5$.

b) $V_n = b^n \times V_0 = 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Or, $V_n = U_n - 1$. Donc, $U_n = 1 + V_n = 1 + 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

c) $U_{n+1} - U_n = 1 + 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} - 1 - 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

$= 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \times \left(\dfrac{2}{5} - 1\right) = 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \times \left(\dfrac{-3}{5}\right) = -3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n < 0$.

La suite (U_n) est bien décroissante.