Suites : Résumé de cours et méthodes

1 Généralités

DÉFINITION

Une suite numérique est une liste de nombres, rangés et numérotés :
• à l'entier 0 correspond le nombre noté U_0
• à l'entier 1 correspond le nombre noté U_1
...
• à l'entier n correspond le nombre noté U_n (appelé terme de la suite de rang n).
La suite est notée (U_n)

Remarque :
Ne pas confondre (U_n) qui représente la **suite**, et U_n qui est le **nombre** représentant le terme de la suite de rang n.
Il y a principalement deux manières de définir une suite :

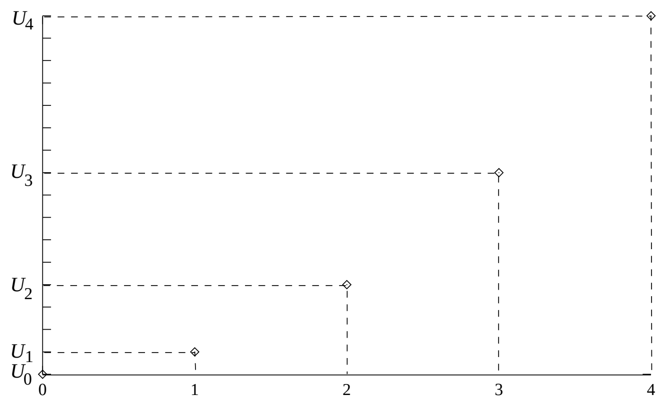
1-1 Suite définie de façon explicite

Dans ce cas, on dispose d'une formule permettant de calculer directement U_n en fonction de n.
C'est à dire qu'il existe une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ telle que, pour tout entier n, $U_n = f(n)$.
Exemples :

1) Soit (U_n), la suite définie par $U_n = 3n+4$.
Le premier terme de la suite est alors $U_0 = 3\times 0+4 = 4$ (on remplace n par 0).
$U_1 = 3\times 1+4 = 7$ (on remplace n par 1).
$U_{10} = 3\times 10+4 = 34$ (on remplace n par 10).
Pour tout n, $U_{n+1} = 3\times(n+1)+4 = 3n+3+4 = 3n+7$ (on remplace n par $n+1$).

2) Soit (U_n), la suite définie par $U_n = n^2$.
On a : $U_0 = 0^2 = 0$, $U_1 = 1^2 = 1$, $U_2 = 2^2 = 4$.
Et pour tout n, $U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2+2n+1$.

Représentation graphique d'une suite définie de façon explicite : Dans un repère orthogonal, on place les points d'abscisse n et d'ordonnée U_n (que l'on ne joint pas entre eux !). Cela revient à ne tracer que les points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f.
Avec la suite de l'exemple 2 $\left(U_n = n^2\right)$, cela donne la représentation graphique suivante :



1-2 Suite définie par une relation de récurrence

Dans ce cas là, il n'y a plus de formule permettant de calculer directement U_n en fonction de n, mais on dispose d'une relation (dite de récurrence) permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir de celui de rang n. Ainsi, en connaissant le premier terme U_0, on peut calculer le terme suivant U_1. Puis avec U_1, on peut calculer le terme suivant U_2, etc...
D'un point de vue mathématique, la suite est définie par :
le terme initial U_0 et la relation de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$ (où f est une fonction définie sur un intervalle I tel que : $U_0 \in I$ et pour tout x de I, $f(x) \in I$).

Exemples :

1) Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 3 \times U_n$.
On a alors, $U_1 = 3 \times U_0 = 3 \times 2 = 6$ (on remplace n par 0 dans le relation de récurrence) .
$U_2 = 3 \times U_1 = 3 \times 6 = 18$ (on remplace n par 1 dans le relation de récurrence) .
$U_3 = 3 \times U_2 = 3 \times 18 = 54$ (on remplace n par 2 dans le relation de récurrence) .

2) Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = -1,5$ et $U_{n+1} = 2\sqrt{4 + U_n}$.
On a alors, $U_1 = 2\sqrt{4 + U_0} = 2\sqrt{4 - 1,5} \approx 3,16$.
$U_2 = 2\sqrt{4 + U_1} \approx 2\sqrt{4 + 3,16} \approx 5,35$.

2 Sens de variation d'une suite

DÉFINITION

- Une suite (U_n) est dite **croissante** si pour tout entier n, $U_{n+1} \geqslant U_n$.
- Une suite (U_n) est dite **décroissante** si pour tout entier n, $U_{n+1} \leqslant U_n$.

Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :
Calculer et étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$ pour tout n :

1) si pour tout n, $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ alors la suite (U_n) est croissante.

2) si pour tout n, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.

Exemple : Soit (U_n), la suite définie par $U_n = n^2$.
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \geqslant 0$ (car $n \geqslant 0$).
La suite (U_n) est donc croissante.

3 Suites arithmétiques

DÉFINITION

Une suite est dite arithmétique si l'on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre .
Autrement dit, une suite (U_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r (appelé **raison**) tel que pour tout entier n, $U_{n+1} = U_n + r$.

$$\boxed{U_0} \xrightarrow{+r} \boxed{U_1} \xrightarrow{+r} \boxed{U_2} \text{ - - - - - - } \boxed{U_n} \xrightarrow{+r} \boxed{U_{n+1}}$$

Exemple :
4, 7, 10, 13 et 16 sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 :

$$\boxed{4} \xrightarrow{+3} \boxed{7} \xrightarrow{+3} \boxed{10} \xrightarrow{+3} \boxed{13} \xrightarrow{+3} \boxed{16}$$

PROPRIÉTÉ

Si une suite (U_n) est telle que pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.

Exemple :
Soit (U_n), la suite définie par $U_n = 4n + 5$.
Pour tout n, $U_{n+1} = 4(n+1) + 5 = 4n + 9$. Donc, $U_{n+1} - U_n = 4n + 9 - (4n + 5) = 4$.
(U_n) est donc une suite arithmétique de raison égale à 4.

Remarques :

- De façon générale, si pour tout n, U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = An + B$ alors (U_n) est une suite arithmétique de raison A.
- Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique se situent sur une même droite de coefficient directeur égal à la raison.

PROPRIÉTÉ

> Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers n et p :
> - $U_n = U_0 + nr$
> - $U_n = U_p + (n-p)r$

Exemples :

1) Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$; $\quad U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$.

2) Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_2 = 7$ et $U_5 = 19$.
Pour trouver la raison r : on a $U_5 = U_2 + (5-2)r$, d'où $19 = 7 + 3r \Leftrightarrow r = 4$
A partir de là, on peut calculer U_{10} en utilisant que $U_{10} = U_2 + (10-2)r = 7 + 8 \times 4 = 39$.

Exemple classique : placements à intérêts simples
- Principe général : pour un taux annuel de $x\%$, on reçoit chaque année le même intérêt égal à $x\%$ du capital initial.
Le capital obtenu au bout de la $n$ième année, U_n, est le terme d'une suite arithmétique de raison égale à $\frac{x}{100} \times U_0$.
- Application : pour un taux annuel de 5 % avec intérêts simples et un capital initial de $U_0 = 1000$ euros.
La raison de la suite arithmétique est : $r = \frac{5}{100} \times 1000 = 50$.
Le capital au bout de 8 ans sera : $U_8 = U_0 + 8r = 1000 + 8 \times 50 = 1400$.

PROPRIÉTÉ

> **Sens de variation d'une suite arithmétique de raison r :**
> - Si $r \geqslant 0$, la suite est croissante.
> - Si $r \leqslant 0$, la suite est décroissante.

4 Suites géométriques

DÉFINITION

> Une suite est dite géométrique si on passe d'un terme au terme suivant en le multipliant toujours par le même nombre non nul.
> Autrement dit, une suite (U_n) est **géométrique** s'il existe un réel $q \neq 0$ (appelé **raison**) tel que pour tout entier n, $U_{n+1} = q \times U_n$.
>
> $\boxed{U_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{U_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{U_2}$ - - - - - - $\boxed{U_n} \xrightarrow{\times q} \boxed{U_{n+1}}$

Exemple :
3, 6, 12, 24 et 48 sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 :

$\boxed{3} \xrightarrow{\times 2} \boxed{6} \xrightarrow{\times 2} \boxed{12} \xrightarrow{\times 2} \boxed{24} \xrightarrow{\times 2} \boxed{48}$

PROPRIÉTÉ

> Si une suite (U_n) (n'ayant aucun terme nul) est telle que pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} =$ constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.

Exemple :
Soit (U_n), la suite définie par $U_n = 3 \times 4^n$.
Pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3 \times 4^{n+1}}{3 \times 4^n} = 4$.
(U_n) est donc une suite géométrique de raison égale à 4.

Remarque :
De façon générale, si pour tout n, U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = A \times B^n$ alors (U_n) est une suite géométrique de raison B.

PROPRIÉTÉ

Si (U_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tous entiers n et p :

- $U_n = q^n \times U_0$
- $U_n = q^{(n-p)} \times U_p$

Exemples :

1) Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.

2) Soit (U_n) la suite géométrique de raison positive telle que $U_2 = 7$ et $U_4 = 63$.
Pour trouver la raison q : on a $U_4 = q^{4-2} \times U_2$, d'où $63 = 7 \times q^2 \Leftrightarrow q^2 = 9$.
Donc, $q = 3$ (car $q > 0$)
A partir de là, on peut calculer U_6 en utilisant que $U_6 = q^{6-2} \times U_2 = 3^4 \times 7 = 567$.

Exemple classique : placements à intérêts composés

- Principe général : pour un taux annuel de $x\%$, le capital augmente chaque année de $x\%$ (ce qui revient à le multiplier par $1 + \frac{x}{100}$) . Donc le capital obtenu au bout de la $n$ième année, U_n, est en fait le terme d'une suite géométrique de raison égale à $1 + \frac{x}{100}$.
- Application : pour un taux annuel de 5 % avec intérêts composés et un capital initial de $U_0 = 1000$ euros.
La raison de la suite géométrique est $q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$.
Le capital au bout de 8 ans sera : $U_8 = q^8 \times U_0 = (1,05)^8 \times 1000 \approx 1477,45$.